L2 MTH1314 2014-2015

Correction du Devoir Maison n° 3

Solution de l'exercice 1

On désire décomposer dans $\mathbb{R}$, la fraction suivante,

$$F = \frac{X^2}{(X^2-1)(X^2+1)}.$$

On note tout d'abord que la partie entière de cette fraction est nulle. Puis on remarque que le dénominateur se factorise dans $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$(X^2-1)(X^2+1) = (X-1)(X+1)(X^2+1)$$

où X^2+1 est irréductible dans $\mathbb{R}$ (ses deux racines sont i et $-i$ complexes). On en déduit donc la forme de sa décomposition en éléments simpes : il existe a, b, c et d quatre réels tels que :

$$F = \frac{X^2}{(X^2-1)(X^2+1)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+1}.$$

On remarque que la fraction F est paire. Donc,

$$F(-X) = \frac{a}{-X-1} + \frac{b}{-X+1} + \frac{-cX+d}{X^2+1} = \frac{-a}{X+1} + \frac{-b}{X-1} + \frac{-cX+d}{X^2+1} = F(X).$$

Donc par unicité de la décomposition en éléments simples,

$$-a = b \qquad -b = a \qquad -c = c \qquad d = d.$$

Ce qui se résume par,

$$b = -a \qquad \text{et} \qquad c = 0.$$

Le pôle 1 étant simple on calcule aisément le coefficient a,

$$a = (X-1)F(X)|_{X=1} = \left.\frac{X^2}{(X+1)(X^2+1)}\right|_{X=1} = \frac{1}{4}.$$

Ce qui nous donne directement

$$b = -\frac{1}{4}.$$

On note ici que contrairement au F_4 de l'exercice 4 du TD 4, la formule « a=le numérateur sur la dérivée du dénominateur au point $X = 1$ » marche toujours naturellement mais demande un peu plus de calculs. On termine avec d où une évaluation en 0 suffit,

$$F(0) = 0 = -a + b + d = \frac{-1}{4} + \frac{-1}{4} + d.$$

Donc,

$$d = \frac{1}{2}.$$

D'où on conclut que,

$$F = \frac{1/4}{X-1} + \frac{-1/4}{X+1} + \frac{1/2}{X^2+1}.$$

Solution de l'exercice 2

Commençons par écrire σ en produit de cycles disjoints comme on l'a vu en classe,

$$\sigma = (1,\, 5,\, 2,\, 6,\, 8,\, 7,\, 3,\, 4).$$

Donc en réalité σ est un cycle de longueur 8. Une décomposition de σ en transpositions est,

$$\sigma = (1,\, 5)(5,\, 2)(2,\, 6)(6,\, 8)(8,\, 7)(7,\, 3)(3,\, 4).$$

Attention à l'ordre de ces transpositions, elles ne sont pas toutes à supports disjoints et donc ne commutent pas a priori. Pour la signature deux arguments possibles, ou bien l'on dit que σ est le produit de 7 transpositions et donc,

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^7 = -1.$$

Pour ceux qui doutent un peu, ϵ est un morphisme donc

$$\epsilon(\sigma) = \epsilon((1,\, 5))\epsilon((5,\, 2))\epsilon((2,\, 6))\epsilon((6,\, 8))\epsilon((8,\, 7))\epsilon((7,\, 3))\epsilon((3,\, 4)) = (-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1).$$

Ou bien l'on dit que σ possède une seule orbite (un seul cycle et aucun point fixe) et donc,

$$\epsilon(\sigma) = -1.$$

Pour répondre à la dernière question, on dit qu'il est impossible pour σ de s'écrire comme un produit de 12 transpositions. Par l'absurde, sinon il existe t_i pour $1 \leqslant i \leqslant 12$ des transpositions telles que

$$\sigma = t_1 \circ t_2 \circ t_3 \circ t_4 \circ t_5 \circ t_6 \circ t_7 \circ t_8 \circ t_9 \circ t_{10} \circ t_{11} \circ t_{12}.$$

Puis par la propriété de morphisme, la signature de σ serait alors,

$$\epsilon(\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \epsilon(t_i) = \prod_{i=1}^{n} (-1) = (-1)^{12} = 1.$$

NB : La notation en produit est justifiée du fait que ϵ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui est naturellement commutatif.
Ce qui est absurde puisque l'on a déjà vu que sa signature valait -1.

Solution de l'exercice 3

1. Un peu de révisions sur les bijections. Fixons $g \in G$. Deux façons possibles. On montre que τ_g est injective et surjective ou l'on exhibe directement une réciproque.
   NB : En réalité puisque τ_g est une application de G dans G et que G est de cardinal fini, il suffit de montrer que τ_g est injective, respectivement surjective, pour conclure qu'elle est bijective.
   Montrons que τ_g est injective. Soient x et y deux éléments de G tels que $\tau_g(x) = \tau_g(y)$. Donc par définition,
   $$gx = gy. \tag{1}$$
   L'élément g est dans le *groupe* G, il possède donc un inverse g^{-1}. En multipliant l'égalité (1) par g^{-1}, on obtient $x = y$. Donc τ_g est injective.
   Montrons que τ_g est surjective. Soit $y \in G$, alors par stabilité du groupe, $x = g^{-1}y$ est dans G. De plus $\tau_g(x) = gg^{-1}y = y$. Donc pour tout élément y dans G on a trouvé un antécédent $x = g^{-1}y$ tel que $\tau_g(x) = y$. Donc τ_g est surjective.

Seconde méthode montrons que τ_g admet une application réciproque, id est il existe τ'_g de G dans G tel que pour tout $x \in G$, $\tau'_g \circ \tau_g(x) = x$, ET, $\tau_g \circ \tau'_g(x) = x$.
NB : une seule condition ne suffit pas, en effet $\tan \circ \arctan = id_{\mathbb{R}}$ *et pourtant la fonction* $\tan$ *n'est pas une bijection de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *(car non injective) de même* $\ln \circ \exp = id_{\mathbb{R}}$ *et pourtant la fonction* $\exp$ *n'est pas une bijection de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *(car non surjective).*
Ici prenons $\tau'_g : G \to G$ qui à y associe $g^{-1}y$. On a pour tout $x \in G$ et $y \in G$,

$$\tau'_g \circ \tau_g(x) = g^{-1}\tau_g(x) = g^{-1}gx = x \qquad \text{et} \qquad \tau_g \circ \tau'_g(y) = g\tau'_g(y) = gg^{-1}y = y.$$

Donc τ_g est bijective.

2. D'après la question précédente, la fonction τ est bien définie. Montrons que c'est un morphisme de groupe entre $(G, .)$ et $(S_G, \circ)$. Soient g et h deux éléments de G. Par définition, $\tau(gh) = \tau_{gh}$ c'est-à-dire l'application qui à x dans G associe ghx. D'autre part $\tau(g) \circ \tau(h) = \tau_g \circ \tau_h$ est l'application définie par,

$$\forall x \in G, \quad \tau_g \circ \tau_h(x) = \tau_g(hx) = ghx.$$

Donc,

$$\forall x \in G, \quad \tau_g \circ \tau_h(x) = \tau_{gh}(x).$$

Ce qui revient à dire exactement que $\tau_g \circ \tau_h = \tau_{gh}$ et finalement,

$$\tau(g) \circ \tau(h) = \tau(gh).$$

D'où le fait que τ soit un morphisme.
Montrons que τ est injectif. Soit g et h deux éléments de G tels que

$$\tau(g) = \tau(h),$$

id est $\tau_g = \tau_h$ et donc pour tout $x \in G$,

$$\tau_g(x) = gx = \tau_h(x) = hx.$$

L'égalité étant vraie partout on peut prendre $x = e$ l'élément neutre du groupe G. Alors

$$g = h.$$

Ce qui montre bien que τ est injectif.

3. Voici une rédaction détaillée de l'isomorphisme entre G et un sous-groupe de S_G. On pose $H = \mathrm{Im}(\tau) = \tau(G)$. Puisque τ est un morphisme, H est un sous-goupe de S_G. Puis, comme τ est à valeurs dans H (par la définition même de H), on est en droit de considérer l'application $\tilde{\tau} : G \to H$ qui à tout élément g de G associe $\tilde{\tau}(g) = \tau(g)$, application qui est donc bien définie. Elle conserve la propriété de morphisme et l'injectivité dues à τ : pour tout g et h,

$$\tilde{\tau}(gh) = \tau(gh) = \tau(g) \circ \tau(h) = \tilde{\tau}(g) \circ \tilde{\tau}(h).$$
$$\tilde{\tau}(g) = \tilde{\tau}(h) \Longrightarrow \tau(g) = \tau(h) \Longrightarrow g = h.$$

L'application $\tilde{\tau}$ *est exactement la même que* τ *sauf que l'on considère un ensemble d'arrivée où l'on a jeté tout ce qui était inutile.*
A l'inverse de τ cependant, l'application $\tilde{\tau}$ est surjective (c'est fait pour). Soit $f \in H \subseteq S_G$, puisque H est l'image de τ, par définition même, il existe $g \in G$ tel que $\tau(g) = f$ et donc $\tilde{\tau}(g) = f$. Donc pour tout élément f de l'espace d'arrivée H on sait qu'il existe un antécédent. Le morphisme $\tilde{\tau}$ est surjectif et injectif, c'est donc un isomorphisme entre G et H. Par conséquent, G est isomorphe à H, un sous-groupe de S_G.

4. Petite coquille dans l'énoncé,
On indice les éléments de G de la façon suivante : $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$. On pose $\varphi : S_n \to S_G$ l'application qui à σ associe la bijection u définie par, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $u(\boldsymbol{g}_i) = \boldsymbol{g}_{\sigma(i)}$. Montrer que φ est un isomorphisme. Et en déduire que G est isomorphe à un sous-goupe de S_n.
Montrons que l'application ϕ est un morphisme. Soient σ_1 et σ_2 deux permutations de S_n, alors par définition, $\varphi(\sigma_1 \circ \sigma_2)$ est l'application définie par pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $\varphi(\sigma_1 \circ \sigma_2)(g_i) = g_{\sigma_1 \circ \sigma_2(i)}$. D'autre part on calcule $\varphi(\sigma_1) \circ \varphi(\sigma_2)$, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\varphi(\sigma_1) \circ \varphi(\sigma_2)(g_i) = \varphi(\sigma_1)(g_{\sigma_2(i)}) = g_{\sigma_1(\sigma_2(i))} = g_{\sigma_1 \circ \sigma_2(i)} = \varphi(\sigma_1 \circ \sigma_2)(g_i).$$

Les deux applications sont égales sur G tout entier, elles sont donc égales,

$$\varphi(\sigma_1) \circ \varphi(\sigma_2) = \varphi(\sigma_1 \circ \sigma_2).$$

Et φ est un morphisme entre $(S_n, \circ)$ et $(S_G, \circ)$.
Montrons que φ est injectif. Soient toujours σ_1 et σ_2 deux permutations de S_n telles que,

$$\varphi(\sigma_1) = \varphi(\sigma_2).$$

Donc pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\varphi(\sigma_1)(g_i) = g_{\sigma_1(i)} = \varphi(\sigma_2)(g_i) = g_{\sigma_2(i)}.$$

Naturellement tous les éléments du groupe sont distincts deux à deux donc, $g_i = g_j \Longrightarrow i = j$, d'où,

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \qquad \sigma_1(i) = \sigma_2(i),$$

id est $\sigma_1 = \sigma_2$ et φ est bien injectif.
Puisque $\mathrm{Card}(S_G) = \mathrm{Card}(S_n) = n!$ on peut conclure directement que φ est une bijection.
Pour ceux que ça intéresse on pouvait aussi montrer que φ est surjectif. Soit f un élément quelconque de S_G. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $f(g_i) \in G$ donc il existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $f(g_i) = g_j$. Cet élément j est unique ($g_i = g_j \Longrightarrow i = j$) donc l'application

$$\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\},$$

qui à i associe l'unique élément $j = \sigma(i)$ tel que $f(g_i) = g_j$ est bien définie.
Cette application est injective : soit i et i' tel que $j = \sigma(i) = \sigma(i')$ alors

$$g_j = f(g_i) = f(g_{i'}).$$

Or f est injective (puisque c'est une bijection) donc $g_i = g_{i'}$ et donc $i = i'$. Puis comme σ est une application injective d'un ensemble fini dans lui-même σ est une bijection de $\{1, \dots, n\}$ id est un élément de S_n.
NB : On peut aussi montrer que σ est surjective. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$, $g_i \in G$ et f est surjective. Donc il existe un autre élément de G, noté g' tel que $f(g') = g_i$. Puisque $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, il existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $g' = g_j$ et donc $f(g_j) = g_i = g_{\sigma(j)}$ (par définition de σ). Ainsi pour i, il existe j tel que $\sigma(j) = i$ et σ est surjective.
L'application σ est donc une permutation telle que $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ $f(g_i) = g_{\sigma(i)}$. Donc $f = \varphi(\sigma)$ et le morphisme φ est aussi surjectif.
On a donc montrer que φ est un isomorphisme et que donc S_G est isomorphe à S_n. Pour finir on restreint $\varphi^{-1} : S_G \to S_n$ au sous-groupe H. Posons ψ cette restriction, $\psi : H \to S_n$. On a toujours que ψ est un morphisme de groupe (puisque l'on a restreint à un sous-groupe) et ψ est toujours injective. Donc encore une fois, on considère $\widetilde{\psi}$ l'application ψ mais où l'on

change l'espace d'arrivée, $\tilde{\psi} : H \to \psi(H) = K$. A nouveau ψ est un morphisme de groupe injectif et surjectif et K est un sous-groupe de S_n. Et finalement,

$$\hat{\tau} := \tilde{\psi} \circ \tilde{\tau} : G \xrightarrow{\tilde{\tau}} H \xrightarrow{\tilde{\psi}} K.$$

est un isomorphisme de groupes entre $(G, .)$ et $(K, \circ)$ et donc G est isomorphe à un sous-groupe de S_n.